Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ____________
Carné: ____________
Sección: ____________

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008
Segundo Examen Parcial (35%)
Tipo A

Soluciones

(1) **(6 puntos)** Para $x > 5$, sea $y = \frac{\sqrt[5]{(x+3)^3}}{(x-1)^2\sqrt[3]{(x-5)^2}}$. Calcule y' usando derivación logarítmica.
Solución: Observando que las expresiones $x+3$, $x-1$ y $x-5$ son todas positivas en vista de la restricción dada $x > 5$, procedemos a tomar logaritmos neperianos a ambos lados de la expresión dada obteniendo:

$$\ln(y) = \frac{3}{5}\ln(x+3) - (2\ln(x-1) + \frac{2}{3}\ln(x-5))$$

(Derivando implícitamente a ambos lados)

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{5(x+3)} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{3(x-5)}$$

$$y' = \frac{\sqrt[5]{(x+3)^3}}{(x-1)^2\sqrt[3]{(x-5)^2}}\left[\frac{3}{5(x+3)} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{3(x-5)}\right].$$

(2) **(4 puntos c/u) Calcule**

(a) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Solución:
Haciendo el cambio de variable $u = 1+e^x$, $du = e^x dx$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{1+e^x}dx &= \int \frac{1}{u}du \\ &= \ln(u) + C \\ &= \ln(1+e^x) + C.\end{aligned}$$

(b) $\int_0^{\ln(\sqrt{2})} \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$
Solución:
Haciendo el cambio de variable $u = e^x$, $du = e^x dx$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\ln(\sqrt{2})} \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{1-(\frac{u}{2})^2}} \\
&\text{(tomando } v=\frac{u}{2},\ dv=\frac{du}{2}\text{)} \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \\
&= \operatorname{arcsen}(v)\Big|_{v=\frac{1}{2}}^{v=\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

(c) $\int \frac{\log_3(x^2)}{x}dx$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\log_3(x^2)}{x}dx &= 2\int \frac{\log_3(x)}{x}dx \\
&= \frac{2}{\ln(3)}\int \frac{\ln(x)}{x}dx \\
&\text{(tomando } u=\ln(x),\ du=\frac{1}{x}dx\text{)} \\
&= \frac{2}{\ln(3)}\int u du \\
&= \frac{2}{\ln(3)}\frac{u^2}{2}+C \\
&= \frac{(\ln(x))^2}{\ln(3)}+C.
\end{aligned}
$$

(d) **Solución:**

$$\begin{aligned}
D_x\left(4x^{\pi}-(5\sqrt{2})^{x^2}\right) &= D_x\left(4e^{\pi\ln(x)}-e^{x^2\ln(5\sqrt{2})}\right)\\
&= \frac{4\pi}{x}e^{\pi\ln(x)}-2x\ln(5\sqrt{2})e^{x^2\ln(5\sqrt{2})}\\
&= \frac{4\pi}{x}x^{\pi}-2x\ln(5\sqrt{2})(5\sqrt{2})^{x^2}\\
&= 4\pi x^{\pi-1}-2x\ln(5\sqrt{2})(5\sqrt{2})^{x^2}.
\end{aligned}$$

(3) (a) (3 puntos) Usando la definición del senh(x), verifique la siguiente identidad:
senh$^2(x)=\frac{\cosh(2x)-1}{2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{senh}^2(x) &= \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}\\
&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)-\frac{1}{2}\\
&= \frac{\cosh(2x)-1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) (3 puntos) Calcule

$\int_0^{\sqrt{\ln(3)}} x\mathbf{senh}^2(x^2)dx$

Solución:
Haciendo el cambio de variable $u=x^2$, $du=2xdx$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\ln(3)}} x\text{senh}^2(x^2)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\ln(3)}\text{senh}^2(u)du\\
&\text{(usando la parte (a))}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\ln(3)}\frac{\cosh(2u)-1}{2}du\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\text{senh}(2u)}{2}-u\right]\Big|_{u=0}^{u=\ln(3)}\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\text{senh}(\ln(9))}{2}-\ln(3)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{9-\frac{1}{9}}{4}-\ln(3)\right]\\
&= \frac{1}{2}-\frac{\ln(3)}{4}.
\end{aligned}$$

(4) **(7 puntos) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar respecto al eje y la región del primer cuadrante acotada por las curvas de ecuaciones $y = x^2$ y $x = y^2$**

Solución:
Este problema se puede hacer de dos formas:
por arandelas:

$$\int_0^1 \pi((\sqrt{y})^2 - y^4)dy = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10},$$

o por cascarones cilíndricos:

$$V = 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{3\pi}{10}.$$